

SÉRIE E : N° 67

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ANNIE BESSERRE

1^{re} THÈSE. — SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COUPLES D'ANNEAUX
OU DE MODULES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 janvier 1967 devant la Commission d'Examen

MM. E. BLANC

Président

M. GUILLAUME

A. MICALI

P. SAMUEL

} *Membres du jury*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR

1968

SÉRIE E : N° 67

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ANNIE BESSERRE

1^{re} THÈSE. — SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COUPLES D'ANNEAUX
OU DE MODULES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 janvier 1967 devant la Commission d'Examen

MM. E. BLANC	<i>Président</i>
M. GUILLAUME	} <i>Membres du jury</i>
A. MICALI	
P. SAMUEL	

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1968



SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COUPLES D'ANNEAUX OU DE MODULES

PAR ANNIE BESSERRE.

INTRODUCTION.

Ce travail est issu de la remarque suivante : étant donnés un anneau A , commutatif à élément unité, un idéal premier $\mathfrak{p}$ et une partie multiplicative régulière S de A , l'idéal $\mathfrak{p}(S^{-1}A) \cap A$ de A contient l'idéal $\mathfrak{p}$ et ne lui est égal que si $\mathfrak{p}$ ne rencontre pas S .

J'ai alors étudié dans un premier chapitre la propriété, notée $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, A, B)$, pour un anneau A , un sur-anneau B de A , et un idéal $\mathfrak{a}$ de A d'être tels que $\mathfrak{a}B \cap A = \mathfrak{a}$, et plus généralement la propriété, notée $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$, pour un A -module E un sous- A -module E' de E et un idéal $\mathfrak{a}$ de A , d'être tels que $\mathfrak{a}E \cap E' = \mathfrak{a}E'$.

On remarque qu'une autre écriture en est :

« La suite $0 \rightarrow E'/\mathfrak{a}E' \rightarrow E/\mathfrak{a}E$ de A -modules est exacte. »,

ce qui en annonce les liens avec les notions de platitude et fidèle platitude. J'ai précisé ces liens et vérifié le comportement de cette propriété $\mathbf{B}_2$ lors des opérations habituelles de passage aux quotients, aux anneaux et modules de fractions, aux limites inductives, aux sommes directes, etc.

Un premier résultat est, dans le cas où E et E' sont des A -modules libres de type fini, de dimension q et q' , l'équivalence de $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ avec l'impossibilité de trouver un scalaire μ

dans $A\mathfrak{a}$, tel que le produit par μ de chacun des mineurs d , d'ordre q' , de la matrice de l'injection canonique $\varphi : E' \rightarrow E$ soit dans $\mathfrak{a}$.

Ce résultat permet l'étude ultérieure de l'ensemble

$$P = \{ p \in \text{Spec } A / \mathbf{B}_2(p, E', E) \}.$$

Celui-ci est un ouvert dans la topologie de Zariski, lorsque les modules E et E' sont projectifs de type fini, et ne l'est pas nécessairement sinon, comme le prouve un contre-exemple étudié.

J'ai essayé, l'anneau A et les A -modules E et E' étant fixés, de caractériser les idéaux $\mathfrak{a}$ de A tels que $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$. Je n'ai réussi que dans le cas d'un anneau A principal.

Le dernier paragraphe de ce chapitre est consacré à l'étude plus particulière de la propriété $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, A, B)$. On l'y trouve liée au caractère entier de l'anneau B sur l'anneau A et l'on montre, d'autre part, que si B est plat sur A et tel que $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, A, B)$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A , alors et alors seulement, B est fidèlement plat sur A .

Le chapitre II débute par des rappels de résultats connus sur les algèbres universelles. Son but est l'étude, pour un A -module E , un sous- A -module E' , un idéal $\mathfrak{a}$ de A , et l'un quelconque U des foncteurs S , T , Λ du diagramme commutatif suivant, où $\varphi : E' \rightarrow E$ est l'injection canonique.

$$\begin{array}{ccccc}
 U(E') & \longrightarrow & U(E'/\mathfrak{a}E') \simeq U(E')/\mathfrak{a}U(E') & & \\
 \downarrow U(\varphi) & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
 & E' \longrightarrow E'/\mathfrak{a}E' & & & \\
 & \downarrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} & & \\
 & E \longrightarrow E/\mathfrak{a}E & & & \\
 & \downarrow & \downarrow & & \\
 U(E) & \longrightarrow & U(E/\mathfrak{a}E) \simeq U(E)/\mathfrak{a}U(E) & & \\
 & & & & \downarrow U(\bar{\varphi}) = \overline{U(\varphi)}
 \end{array}$$

On sait que l'injectivité de φ n'entraîne ni celle de $\bar{\varphi}$ ni celle de $U(\varphi)$; que l'injectivité de $U(\bar{\varphi})$ n'est entraînée ni par celle de $U(\varphi)$ ni par celle de $\bar{\varphi}$.

On établira, au cours de ce chapitre des relations entre :

- L'injectivité de φ et celle de $U(\varphi)$;
- L'injectivité de φ et $\bar{\varphi}$ et celle de $U(\varphi)$;
- L'injectivité de φ et $\bar{\varphi}$ et celle de $U(\varphi)$ et $U(\bar{\varphi})$;
- L'injectivité de φ , $\bar{\varphi}$ et $U(\varphi)$ et celle de $\overline{U(\varphi)}$,

cette dernière étude étant celle des relations entre la propriété $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ et la propriété $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, U(E'), U(E))$.

Les résultats essentiels seront alors obtenus dans le cas de deux A -modules E' et E projectifs de type fini, et les outils principalement utilisés seront, d'une part le théorème 2 du chapitre I, d'autre part une généralisation d'un résultat connu de Sylvester dans le cas de l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel de dimension finie.

On peut penser que les mêmes résultats seraient vrais de deux A -modules plats E et E' , puisque ceux-ci sont limites inductives de libres. Je n'ai pas réussi à le prouver.

Pour un anneau A , un sur-anneau B de A , notons $\mathbf{B}_1(A, B)$ la propriété $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, A, B)$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A . Nous dirons alors que B est bon sur A . Le but du chapitre III est d'établir des relations entre les propriétés $\mathbf{B}_1(A, B)$ et $\mathbf{B}_1(A[X], B[X])$. Celles-ci nous le savons déjà, sont étroitement liées, aux propriétés de platitude et fidèle platitude des anneaux correspondants, également aux propriétés P_2 et P_3 que nous introduisons et étudions.

J'aurais voulu déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que la propriété $\mathbf{B}_1(A, B)$ entraîne la propriété $\mathbf{B}_1(A[X], B[X])$. Je n'ai obtenu que des conditions nécessaires et des conditions suffisantes mais non nécessaires, comme le prouvent les contre-exemples.

Nous avons vu que les propriétés pour un anneau B d'être, soit bon, soit entier sur un de ses sous-anneaux A sont liées. En particulier, si A est un anneau intègre, K son corps des fractions, Ω une clôture algébrique de K , $\bar{A}$ la fermeture intégrale de A dans Ω , on sait que $\bar{A}$ est bon sur A , si A est principal.

D'autre part, étant donné un anneau A , un polynôme unitaire de $A[X]$ ne s'y décompose pas, en général, en produit de poly-

nomes de degré 1. Pourtant tout polynôme unitaire de $\bar{A}[X]$ s'y décompose en produit de polynômes de degré 1.

J'ai, dans le chapitre IV, élargi cette situation, en construisant, à partir d'un anneau A un sur-anneau $\mathfrak{A}$, entier et bon sur A , et tel que tout polynôme à coefficients dans $\mathfrak{A}$ se décompose dans $\mathfrak{A}[X]$ en produit de polynômes de degré 1.

Ce qui m'a conduit à définir les anneaux (II) , les anneaux (II_A) , à étudier leurs propriétés et à les utiliser pour construire l'anneau $\mathfrak{A}$.

L'étude de l'anneau $\mathfrak{A}$, non plus en tant qu'anneau bon sur A , mais en tant que « clôture algébrique » de A ne fait pas partie de ce Mémoire et sera l'objet d'une publication ultérieure.

C'est grâce à M. Samuel que j'ai entrepris et poursuivi ce travail. J'ai eu le bonheur que toujours il m'écoute et me réponde. Il m'a été guide et exemple; qu'il sache que je lui dois l'enrichissement de ces années d'étude et leur aboutissement présent.

Les connaissances que j'ai acquises des exposés de M. Micali sont à l'origine d'un chapitre de cet Ouvrage. Sa sollicitude amicale et sa compétence m'ont été également secourables.

Que M. Guillaume, qui a choisi pour moi un second sujet et m'a associée à son équipe de travail soit assuré de ma gratitude.

Je tiens à exprimer mes remerciements à M. Blanc qui a bien voulu accepter de présider mon jury.

Remarque préliminaire. — Tous les anneaux considérés seront commutatifs, à élément unité, noté 1. Tout sous-anneau A d'un anneau B a même élément unité que B . Tout homomorphisme φ d'un anneau A dans un anneau B est tel que $\varphi(1) = 1$. Tout module M sur un anneau A est un A -module unitaire.

CHAPITRE I.

BONTÉ DANS LA CATÉGORIE DES MODULES.

1. EXPOSITION DU PROBLÈME. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B , et $\mathfrak{a}$ un idéal de A , non égal à A . Alors l'idéal $\mathfrak{a}B \cap A$ contient $\mathfrak{a}$ et en est généralement différent.

Exemples. — 1° Soit K le corps des fractions d'un anneau intègre A , et $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de A . Alors $\mathfrak{a}K$ n'est pas nul, donc $\mathfrak{a}K \cap A = A \supsetneq \mathfrak{a}$.

2° Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau A et S une partie multiplicative régulière de A , rencontrant $\mathfrak{p}$. Écrivons $S^{-1}A$ l'anneau des fractions de A par rapport à S . Alors tout élément a de A , non dans $\mathfrak{p}$, peut s'écrire

$$a = p \frac{a}{p}, \quad p \in \mathfrak{p}, \quad \text{donc} \quad \mathfrak{p}(S^{-1}A) \cap A \not\supseteq \mathfrak{p}.$$

Si, par contre, dans l'exemple précédent, S ne rencontre pas $\mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{p}(S^{-1}A) \cap A = \mathfrak{p}$. En effet, tout élément a de $\mathfrak{p}(S^{-1}A) \cap A$ peut s'écrire

$$a = \sum_{i=1}^n p_i \frac{a_i}{s_i},$$

avec $p_i \in \mathfrak{p}$, $a_i \in A$, $s_i \in S$ pour tout i , $1 \leq i \leq n$, et $a \left(\prod_{i=1}^n s_i \right) \in \mathfrak{p}$.

Donc $a \in \mathfrak{p}$.

Ce qui nous amène aux définitions suivantes :

DÉFINITION 1. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B , $\mathfrak{a}$ un idéal de A .

Si $\mathfrak{a}B \cap A = \mathfrak{a}$, on dira que B est bon pour $\mathfrak{a}$, on écrira $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, A, B)$.

Si B est bon pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A , on dira que B est bon sur A , on écrira $\mathbf{B}_1(A, B)$.

Il est naturel de vouloir étendre ainsi cette définition :

DÉFINITION 2. — Soit A et B deux anneaux, $\mathfrak{a}$ un idéal de A et $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux.

Si $\varphi^{-1}[B\varphi(\mathfrak{a})] = \mathfrak{a}$, on dira que le couple (B, φ) est bon pour $\mathfrak{a}$.

Si le couple (B, φ) est bon pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A , on le dira bon sur A .

Mais il faut remarquer qu'alors φ est nécessairement injectif car la bonté du couple (B, φ) pour l'idéal (0) de A s'écrit $\varphi^{-1}[(0)] = (0)$.

2. SUR LA CATÉGORIE DES MODULES.

PROPOSITION 1. — Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A , E un A -module, E' un sous- A -module de E , $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique, $\bar{\varphi} : E'/\mathfrak{a}E' \rightarrow E/\mathfrak{a}E$ l'homomorphisme de A -modules déduit de φ par passage aux quotients.

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\mathfrak{a}E \cap E' = \mathfrak{a}E'$;
- (2) $\bar{\varphi}$ est injectif.

DÉFINITION 3. — Dans les conditions de la proposition 1, si $\mathfrak{a}$, E' , E vérifient les conditions équivalentes ci-dessus, on écrira $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$.

Si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A , on écrira $\mathbf{B}_2(E', E)$.

Si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ pour tout sous- A -module E' de E , on écrira $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E)$.

Remarque 1. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B , $\mathfrak{a}$ un idéal de A .

Alors $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, A, B)$ si et seulement si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, A, B)$.

PROPOSITION 2. — Soit A un anneau, E un A -module, E' un sous- A -module de E , $\mathfrak{a}$ un idéal de A . Alors :

- (1) Si E/E' est un A -module plat, alors $\mathbf{B}_2(E', E)$.
- (2) Si E est un A -module plat et si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A , de type fini, alors E/E' est un A -module plat.

La démonstration, compte tenu de la définition 3, se trouve dans [1], par exemple.

COROLLAIRE 1. — Soit A un anneau principal, E un A -module, E' un sous- A -module de E . Alors :

- (1) Si le A -module E/E' est sans torsion, alors $\mathbf{B}_2(E', E)$;
- (2) Si E est sans torsion et si $\mathbf{B}_2(E', E)$, alors le A -module E/E' est sans torsion.

En effet, un module sur un anneau principal est sans torsion si et seulement s'il est plat (cf. [1]),

COROLLAIRE 2. — Soit A un anneau, E un A module plat, E' un sous- A -module fidèlement plat de E , $\mathfrak{a}$ un idéal de A . Alors :

Si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de type fini de A , E est fidèlement plat.

En effet, dans la suite exacte $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E/E' \rightarrow 0$, E/E' est plat et E' est fidèlement plat. Alors E est fidèlement plat (cf. [1]).

COROLLAIRE 3. — Soit A un anneau, E un A -module libre, E' un sous- A -module de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\mathbf{B}_2(E', E)$;
- (2) E/E' est un A -module plat.

En effet, E étant libre, est plat.

PROPOSITION 3. — Soit A un anneau, E un A -module, E' un sous- A -module de E , E'' un sous- A -module de E' , $\mathfrak{a}$ un idéal de A :

- (1) Si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ et $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E'', E')$, alors $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E'', E)$;
- (2) Si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E'', E)$, alors $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E'', E')$.

En effet, soit $\varphi : E' \rightarrow E$ et $\varphi' : E'' \rightarrow E'$ les injections canoniques et soit $\bar{\varphi} : E'/\mathfrak{a}E' \rightarrow E/\mathfrak{a}E$ et $\bar{\varphi}' : E''/\mathfrak{a}E'' \rightarrow E'/\mathfrak{a}E'$.

Considérons alors la suite

$$E''/\mathfrak{a}E'' \xrightarrow{\bar{\varphi}'} E'/\mathfrak{a}E' \xrightarrow{\bar{\varphi}} E/\mathfrak{a}E.$$

La composée de deux injections est une injection, d'où (1), $\ker(\bar{\varphi}') \subset \ker(\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}')$, d'où (2).

PROPOSITION 4. — Soit A un anneau, E un A -module, E' un sous- A -module de E , $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de A .

- (1) Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$:
- Si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ et $\mathbf{B}_2(\mathfrak{b}, E', E)$, alors $\mathbf{B}_2(\mathfrak{b}, E'/\mathfrak{a}E', E/\mathfrak{a}E)$;
- (2) Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \cap \text{Ann}(E)$:
- $\mathbf{B}_2(\mathfrak{b}, E', E)$ si et seulement si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}, E', E)$;
- $\mathbf{B}_2(\mathfrak{b}, E'/\mathfrak{a}E', E/\mathfrak{a}E)$ si et seulement si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}, E'/\mathfrak{a}E', E/\mathfrak{a}E)$.

En effet, soit $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique, $\bar{\varphi} : E'/\mathfrak{a}E' \rightarrow E/\mathfrak{a}E$ et

$$\bar{\varphi} : E'/\mathfrak{a}E'/\mathfrak{b}(E'/\mathfrak{a}E') \rightarrow E/\mathfrak{a}E/\mathfrak{b}(E/\mathfrak{a}E).$$

Or on sait [2] qu'on peut écrire :

$$E/\mathfrak{a}E/\mathfrak{b}(E/\mathfrak{a}E) = (E \otimes A/\mathfrak{a}) \otimes A/\mathfrak{b} = E \otimes (A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b}) = E \otimes A/\mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ et $\bar{\varphi} : E'/\mathfrak{b}E' \rightarrow E/\mathfrak{b}E$ est injective, d'où (1).

On démontrera (2) en remarquant que E et E' peuvent être munis d'une structure de $A/\mathfrak{a}$ -modules, et ensuite, $E/\mathfrak{a}E$ et $E'/\mathfrak{a}E'$ étant considérés comme $A/\mathfrak{a}$ -modules, en remarquant que $\mathfrak{a} \subset \text{Ann } E/\mathfrak{a}E$.

PROPOSITION 5. — *Soit A_2 un anneau, A_1 un sous-anneau de A_2 . Soit E un A_2 -module, E' un sous- A_2 -module de E , $\mathfrak{a}_1$ un idéal de A_1 .*

Si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}_1, A_2, E', E)$, alors $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}_1, E', E)$.

PROPOSITION 6. — *Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A , (E_q) et (E'_q) deux familles de A -modules telles que pour tout q :*

E'_q est un sous- A -module de E_q ;

$\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E'_q, E_q)$.

Soit $E = \bigoplus E_q$ et $E' = \bigoplus E'_q$, alors $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$.

En effet, le produit tensoriel commute à la somme directe.

PROPOSITION 7. — *Soit A un anneau, S une partie multiplicative de A , $\mathfrak{a}$ un idéal de A , E un A -module, E' un sous- A -module de E .*

Si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$, alors

$$\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, S^{-1}E', S^{-1}E) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_2(S^{-1}\mathfrak{a}, S^{-1}E', S^{-1}E).$$

Les modules $S^{-1}E'$ et $S^{-1}E$ sont considérés comme $(A, S^{-1}A)$ bimodules.

Cette proposition et le théorème suivant se démontrent aisément à partir de résultats contenus dans [3].

THÉOREME 1. — Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A , E un A -module, E' un sous- A -module de E , $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A .

Si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A , $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}}, E'_{\mathfrak{M}}, E_{\mathfrak{M}})$, alors $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$.

PROPOSITION 8. — Soit A un anneau, E un A -module.

(1) Soit E' un sous- A -module de E et soit $(\mathfrak{a}_j)$ une famille filtrante à droite d'idéaux de A , telles que $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}_j, E', E)$ pour tout j .

Alors $\mathbf{B}_2\left(\bigcup_j \mathfrak{a}_j, E', E\right)$.

(2) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A et soit (E'_j) une famille filtrante à droite de sous- A -modules de E tels que $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E'_j, E)$ pour tout j .

Alors $\mathbf{B}_2\left(\mathfrak{a}, \bigcup_j E'_j, E\right)$.

PROPOSITION 9. — Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A , $(E_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ et $(E'_\alpha, \psi'_{\beta\alpha})$ deux systèmes inductifs de A -modules tels que pour tout α :

E'_α est un sous- A -module de E_α ;

$\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E'_\alpha, E_\alpha)$.

Alors $\mathbf{B}_2\left(\mathfrak{a}, \varinjlim E'_\alpha, \varinjlim E_\alpha\right)$.

En effet, l'exactitude se conserve par passage à la limite inductive et celle-ci commute au produit tensoriel.

PROPOSITION 10. — Soit A un anneau, E un A -module.

(1) Soit E' un sous- A -module de E . L'ensemble des idéaux $\mathfrak{a}$ de A tels que $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ possède un élément maximal.

(2) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A . L'ensemble des sous- A -modules E' de E tels que $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ possède un élément maximal.

Ceci résulte de la proposition 8 et du théorème de Zorn.

3. CATÉGORIE DES MODULES PROJECTIFS. GÉNÉRALITÉS.

THÉOREME 2. — Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A , E un A -module libre de rang q , E' un sous- A -module de E , libre de rang q'

et soit $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique. Écrivons les propositions suivantes :

- (1) $\bar{\varphi} : E'/\mathfrak{a}E' \rightarrow E/\mathfrak{a}E$ est injectif;
- (2) Il n'existe pas de scalaire $\mu \in A - \mathfrak{a}$ tel que les produits par μ de tous les mineurs d'ordre q' de la matrice de φ soient dans $\mathfrak{a}$;
- (3) Il existe un mineur d , d'ordre q' , de la matrice de φ , dont la classe $\bar{d}$, modulo $\mathfrak{a}$, n'est pas diviseur de zéro dans $A/\mathfrak{a}$;
- (4) Il existe un mineur d , d'ordre q' , de la matrice de φ , tel que $\mathfrak{a} : Ad = \mathfrak{a}$.

(1) et (2) d'une part, (3) et (4) d'autre part, sont équivalentes. (3) implique (2).

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq q}$ et $(f'_j)_{1 \leq j \leq q'}$ des bases sur A de E et E' respectivement.

Soit (a_{ji}) la matrice de φ relativement à ces bases.

Écrivons $x' = \sum_{j=1}^{q'} f'_j \lambda_j$, $\lambda_j \in A$, un élément de E' .

— L'injectivité de φ s'exprime ainsi :

$$(1') \quad \left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{q'} \lambda_j a_{ji} = 0 \\ \text{pour tout } i, 1 \leq i \leq q \end{array} \right) \Rightarrow (\lambda_j = 0 \text{ pour tout } j, 1 \leq j \leq q').$$

— D'autre part (cf. [4]), φ est injectif si et seulement si il n'existe pas de scalaire $\mu \neq 0$ tel que les produits par μ de tous les mineurs d'ordre q' de la matrice de φ soient nuls. Condition qu'on écrit :

$$(2') \quad (\forall d, \text{ mineur d'ordre } q' \text{ de la matrice } (a_{ji}) \mu d = 0) \Rightarrow (\mu = 0).$$

— Considérons la proposition suivante que nous écrirons :

(3') $\exists d$, mineur d'ordre q' de la matrice de φ , non diviseur de zéro dans A .

Il est clair que (1') et (2') sont équivalentes et sont impliquées par (3').

Soit alors ξ' un élément de $E'/\mathfrak{a}E'$ et soit $x' = \sum_{j=1}^{q'} f'_j \lambda_j$ un représentant dans E' de ξ' .

— L'injectivité de $\bar{\varphi}$ s'exprime ainsi :

$$(1) \quad \left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{q'} \bar{\lambda}_j \cdot a_{ji} = 0 \\ \text{pour tout } i, 1 \leq i \leq q \end{array} \right) \Rightarrow (\bar{\lambda}_j = 0 \text{ pour tout } j, 1 \leq j \leq q').$$

Ceci équivaut, d'après l'équivalence de (1') et (2') ci-dessus montrée à

$$(2) \quad (\forall d, \text{ mineur d'ordre } q' \text{ de la matrice } (a_{ji}) \bar{\mu} \cdot \bar{d} = 0) \Rightarrow (\bar{\mu} = 0).$$

— L'équivalence de (3) et (4) résulte de la remarque suivante :

Remarque 2. — Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A , c un élément de A . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathfrak{a} : Ac = \mathfrak{a}$;
- (ii) c n'est pas nul modulo $\mathfrak{a}$.

— Il est clair que (3) implique (2).

Remarque 3. — Sous les hypothèses du théorème 2, soit δ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre q' de la matrice (a_{ji}) . Alors on peut exprimer ainsi l'injectivité de φ : δ est un A -module fidèle et ainsi l'injectivité de $\bar{\varphi}$: le transporteur $(\mathfrak{a} : \delta)$ de δ dans $\mathfrak{a}$ est égal à $\mathfrak{a}$.

COROLLAIRE 1. — *Sous les hypothèses du théorème 2 et pour un idéal $\mathfrak{p}$ premier de A , les conditions (1), (2), (4) sont équivalentes à la condition $(3_{\mathfrak{p}})$: il existe un mineur d'ordre q' de la matrice (a_{ji}) n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$.*

En effet, $A/\mathfrak{p}$ est intègre et n'admet pour diviseur de zéro que zéro lui-même. La condition (3) du théorème 2 s'écrit alors $(3_{\mathfrak{p}})$ et il est clair qu'alors (2) implique $(3_{\mathfrak{p}})$.

COROLLAIRE 2. — *Sous les hypothèses du théorème 2, et pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $B_2(\mathfrak{p}, E', E)$;

(2) L'idéal $\hat{\gamma}$ engendré par les mineurs d'ordre q' de la matrice (a_{ji}) n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}$.

COROLLAIRE 3. — Sous les hypothèses du théorème 2, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A , $\mathbf{B}_2(\mathfrak{M}, E', E)$;
- (2) L'idéal engendré par les mineurs d'ordre q' de la matrice de φ est l'anneau A .

COROLLAIRE 4. — Sous les hypothèses du théorème 2, A étant noethérien, $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_i \dots \mathfrak{p}_n$ étant les idéaux premiers associés à $\mathfrak{a}$, la condition (4) du théorème 2 est équivalente à la condition (5) : il existe un mineur d d'ordre q' de la matrice de φ , n'appartenant à aucun $\mathfrak{p}_i$.

Le corollaire 2 est clair à partir du corollaire 1.

Le corollaire 3 se déduit du corollaire 2.

Le corollaire 4 résulte des propriétés établies dans [5].

THÉORÈME 3. — Soit A un anneau principal, E un A -module libre de rang q , E' un sous- A -module de E . Alors les éléments $b \in A$, irréductibles, tels que $\mathbf{B}_2((b), E', E)$ sont ceux qui ne divisent aucun des facteurs invariants.

On écrit $\mathbf{B}_2((b), E', E)$ sous la forme $bE \cap E' = bE'$ et la démonstration est un calcul, simple à partir des résultats contenus dans [6].

4. CATÉGORIE DES MODULES PROJECTIFS. ÉTUDE TOPOLOGIQUE.

Pour un anneau A , un A -module E , un sous- A -module E' de E , nous écrivons :

DÉFINITION 4 : $P = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A / \mathbf{B}_2(\mathfrak{p}, E', E)\}$, les notations étant celles définies dans [7].

THÉORÈME 4. — Soit A un anneau, E un A -module libre, de type fini, E' un sous- A -module de E , libre et de type fini, $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique. Alors P est un ouvert de $\text{Spec } A$ pour la topologie de Zariski.

D'après le corollaire 2 du théorème 2,

$$(\mathfrak{p} \in P) \iff (\partial \nsubseteq \mathfrak{p}).$$

D'autre part, on sait (cf. [7]) que

$$(\delta \subset p) \iff p \in V(\delta).$$

Donc $\text{Spec } A\text{-}P$ est fermé, donc P est ouvert.

THÉORÈME 5. — *Soit A un anneau, E un A -module projectif de type fini, E' un sous- A -module de E , projectif de type fini, $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique.*

Alors P est un ouvert de A pour la topologie de Zariski.

— E' est projectif et de type fini, donc il existe un A -module E'_1 tel que $E' \oplus E'_1$ soit libre et de type fini.

— E'_1 facteur direct d'un A -module libre et de type fini, est projectif et de type fini.

— Or E est projectif et de type fini. Donc également, $E \oplus E'_1$.

— Donc il existe un A -module F , d'ailleurs projectif et de type fini, tel que $(E \oplus E'_1) \oplus F$ soit libre et de type fini.

Soit φ_1 l'injection canonique $E'_1 \rightarrow E' \oplus E'_1$.

Désignons encore par φ l'injection

$$\varphi \oplus 1_{E'_1} : E' \oplus E'_1 \rightarrow E \oplus E'_1$$

et par φ_1 l'injection

$$1_E \oplus \varphi_1 : E \oplus E'_1 \rightarrow E \oplus E'_1 \oplus F.$$

— Soit alors

$$0 : E' \oplus E'_1 \xrightarrow{\varphi} E \oplus E'_1 \xrightarrow{\varphi_1} E \oplus E'_1 \oplus F.$$

0 est injectif et la suite $0 \rightarrow E' \oplus E'_1 \rightarrow E \oplus E'_1 \oplus F$ de A -modules est exacte.

— Soit alors p un idéal premier de A et considérons :

$$\begin{array}{ccc} (E' \oplus E'_1) \otimes_A A/p & \xrightarrow{\varphi \otimes 1_{A/p}} & (E \oplus E'_1 \oplus F) \otimes_A A/p \\ \varphi \otimes 1_{A/p} \searrow & & \nearrow \varphi_1 \otimes 1_{A/p} \\ & (E \oplus E'_1) \otimes_A A/p & \\ & (E \oplus E'_1 \oplus F) \otimes_A A/p = [(E \oplus E'_1) \otimes_A A/p] \oplus [F \otimes_A A/p] & \end{array}$$

donc $\varphi_1 \otimes 1_{A/p}$ est injective.

Donc

$$0 \otimes 1_A/p \text{ est injectif si et seulement si } \varphi \otimes 1_A/p \text{ est injectif.}$$

C'est-à-dire

$$\mathbf{B}_2(p, E', E) \Leftrightarrow \mathbf{B}_2(p, E' \oplus E'_1, E \oplus E'_1 \oplus F).$$

Or $E' \oplus E'_1$ et $E \oplus E'_1 \oplus F$ sont libres et de type fini et il suffit d'appliquer le théorème 4.

Remarque 4. — P n'est pas en général, nécessairement ouvert : c'est ce que montre l'exemple suivant :

Soit k un corps et soit $A = k[x, y]$.

$p = (x, y)A$ et $q = yA$ sont des idéaux premiers de A .

$E = p$ et $E' = q$ sont des A -modules de type fini.

On montre que $p \in P$ et $q \notin P$. D'autre part, p appartient à l'adhérence du complémentaire dans $\text{Spec} A$ de P . Donc ce complémentaire n'est pas fermé, donc P n'est pas ouvert.

5. CATÉGORIE DES ANNEAUX. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B , $\mathfrak{a}$ un idéal de A . Ceci est un cas particulier de la situation plus générale d'un A -module E , d'un sous- A -module E' de E et d'un idéal $\mathfrak{a}$ de A , envisagée précédemment. Les résultats obtenus demeurent et viennent s'y ajouter :

PROPOSITION 11. — Soit B un anneau; A un sous-anneau de B , $(\mathfrak{a}_i)$ une famille d'idéaux de A telle que, pour tout i , $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}_i, A, B)$.

Alors $\mathbf{B}_1\left(\bigcap_i \mathfrak{a}_i, A, B\right)$.

PROPOSITION 12. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B , $(\mathfrak{a}_i)$ une famille d'idéaux de A . Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-anneaux C de B , dont A est sous-anneau, et tels que $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}_i, A, C)$ pour tout i . Alors $\mathcal{C}$ possède un élément maximal.

Remarque 5. — Soit B un sous-anneau du corps K des fractions d'un sous-anneau intègre A de B . Si $\mathbf{B}_1(A, B)$, alors $B = A$.

PROPOSITION 13. — Soit A un anneau intègre, K le corps des fractions de A , Ω une clôture algébrique de K , $\bar{A}$ la fermeture intégrale de A dans Ω . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) A est intégralement clos ;
- (2) $B_1(\mathfrak{a}, A, \bar{A})$ pour tout idéal principal $\mathfrak{a}$ de A .

COROLLAIRE. — Sous les hypothèses de la proposition 13, si A est un anneau principal, l'anneau $\bar{A}$ est tel que $B_1(A, \bar{A})$.

PROPOSITION 14. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B tel que B soit un A -module libre admettant une base comportant l'unité. Alors $B_1(A, B)$.

COROLLAIRE. — Soit A un anneau, $A[X_1, \dots, X_n]$ est bon sur A . Si A est intégralement clos et si u est un élément entier sur A , alors $A[u]$ est bon sur A .

PROPOSITION 15. — Soit A un anneau noethérien, $\mathfrak{m}$ un idéal de A et $\hat{A}$ le complété de A dans la topologie $\mathfrak{m}$ -adique. Alors si A est un anneau de Zariski, on a $B_1(A, \hat{A})$ [8].

PROPOSITION 16. — Soit A un anneau, S une partie multiplicative régulière de A , $\mathfrak{a}$ un idéal de A , $s : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ la surjection canonique, $S^{-1}A$ l'anneau des fractions de A par rapport à S . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $B_1(\mathfrak{a}, A, S^{-1}A)$;
- (2) $s(S)$ est une partie multiplicative régulière.

Si ces conditions sont réalisées, $S^{-1}A/\mathfrak{a}(S^{-1}A)$ et $(s(S))^{-1}(A/\mathfrak{a})$ sont isomorphes.

En effet, l'homomorphisme

$$S^{-1}A \rightarrow (s(S))^{-1}(A/\mathfrak{a}),$$

$$\frac{a}{s} \mapsto \frac{s(a)}{s(s)}$$

est surjectif et de noyau $\mathfrak{a}(S^{-1}A)$.

DÉFINITION 5. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B . On dira que l'anneau B est plat sur l'anneau A (resp. fidèlement plat) si le A -module B est plat (resp. fidèlement plat).

Remarque 6. — Le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Q}$, sans torsion, est plat, donc l'anneau $\mathbb{Q}$ est plat sur l'anneau $\mathbb{Z}$ (cf. [1]). Mais nous avons vu que $\mathbb{Q}$, corps des fractions de $\mathbb{Z}$, n'est pas bon sur $\mathbb{Z}$.

D'autre part, considérons l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$, et munissons-le d'une somme par composantes et du produit $(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$. C'est alors un anneau à élément unité, commutatif, non intègre, contenant $\mathbb{Z}$, soit B . On voit facilement que B est bon sur $\mathbb{Z}$, mais n'est pas plat sur $\mathbb{Z}$, car

$$(0, x)(n, 0) = (0, nx) = (0, 0),$$

donc B n'est pas un $\mathbb{Z}$ -module sans torsion.

On peut préciser cette situation par le théorème suivant :

THÉORÈME 6. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) B est fidèlement plat sur A ;
- (2) B est plat sur A et $\mathbf{B}_1(A, B)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Ceci résulte du corollaire 2 de la proposition 2 appliqué au sous- A -module fidèlement plat A du A -module plat B .

(1) $\Rightarrow$ (2). Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A et considérons la suite de A -modules $0 \rightarrow A/\mathfrak{a} \rightarrow B/\mathfrak{a}B$. Tensorisons-la par B , fidèlement plat sur A , d'où $0 \rightarrow A/\mathfrak{a} \otimes_A B \rightarrow B/\mathfrak{a}B \otimes_A B$ qui est exacte. Donc aussi la précédente.

THÉORÈME 7. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B . Écrivons les propositions suivantes :

- (1) A a un seul idéal premier $\mathfrak{p}$;
- (2) Pour tout B et tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, $\mathbf{B}_1(\mathfrak{p}, A, B)$.

Alors (1) implique (2).

Si A est intègre, (2) implique (1).

Sinon, non.

— Soit p' un idéal premier de B . $p' \cap A$ étant premier dans A est égal à p .

— Si A est intègre, le corps des fractions de A est un sur-anneau B de A .

Or il n'est bon que pour l'idéal (0) de A . Donc A n'a qu'un seul idéal premier, l'idéal nul.

— Soit K un corps et soit $A = K \times K$. A n'est pas intègre et possède deux idéaux premiers $p_1 = K \times \{0\}$ et $p_2 = \{0\} \times K$.

Or tout sur-anneau B de A est tel que $B_1(p_1, A, B)$ et $B_1(p_2, A, B)$; en effet : supposons qu'il existe un sur-anneau B_0 de A tel que, par exemple, $B_1(p_2, A, B_0)$ ne soit pas réalisé. Ceci nécessite que pour tout idéal premier p' de B_0 , $p' \cap A = p_1$, car s'il existe un idéal premier p'_2 de B_0 , tel que $p'_2 \cap A = p_2$, alors $B_1(p_2, A, B_0)$. Donc p_1 est formé d'éléments nilpotents.

Or $(1, 0)$ appartient à p_1 et n'est pas nilpotent (*cf.* [8 bis]).

PROPOSITION 17. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B , tel que B soit entier sur A . Alors pour tout idéal premier $p \in \text{Spec } A$, $B_1(p, A, B)$.

En effet, il existe pour tout idéal premier p de A , un idéal premier p' de B , au-dessus de A (*cf.* [9]).

CHAPITRE II.

BONTÉ ET ALGÈBRES UNIVERSELLES.

Les algèbres considérées sont définies sur un anneau commutatif à élément unité. Elles sont associatives et ont un élément unité identifié à celui de l'anneau. Elles ne sont pas nécessairement commutatives.

Le mot « algèbre universelle » est employé dans son sens de solution d'un certain problème universel.

1. RAPPELS. — Soit A un anneau, M un A -module et $T_q(M) = M \otimes_A \dots \otimes_A M$ le A -module $q^{\text{ième}}$ puissance tensorielle de M .

On pose

$$T_0(M) = \Lambda; \quad T_1(M) = M; \quad T_q(M) = 0 \quad \text{si } q < 0;$$

soit alors

$$T(M) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} T_q(M).$$

Pour p et q dans $\mathbb{Z}$, on définit l'application :

$$\begin{aligned} T_p(M) \times T_q(M) &\longrightarrow T_{p+q}(M), \\ (u, v) &\leadsto u \otimes v \end{aligned}$$

munissant ainsi $T(M)$ d'une structure de A -algèbre graduée de type $\mathbb{Z}$, dans laquelle $T_q(M)$ est le sous- A -module du A -module $T(M)$, des éléments homogènes de degré q . Cette algèbre $T(M)$ est unique à un isomorphisme près, on l'appelle algèbre tensorielle du A -module M .

Soit $\alpha : M \rightarrow T(M)$ l'injection canonique et soit I (resp. J) l'idéal bilatère de $T(M)$ engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$ (resp. $x \otimes x$), x et y parcourant M .

Posons

$$S(M) = T(M)/I \quad (\text{resp. } \Lambda(M) = T(M)/J).$$

Puisque I (resp. J) est un idéal homogène, $S(M)$ [resp. $\Lambda(M)$] est une algèbre graduée de type $\mathbb{Z}$ dont le sous- A -module $S_q(M)$ [resp. $\Lambda_q(M)$] des éléments homogènes de degré q est l'image de $T_q(M)$ par la surjection canonique

$$T(M) \rightarrow S(M) \quad [\text{resp. } T(M) \rightarrow \Lambda(M)].$$

Donc, pour tout $q \in \mathbb{Z}$:

$$S_q(M) = T_q(M)/I \cap T_q(M) \quad ([\text{resp. } \Lambda_q(M) = T_q(M)/J \cap T_q(M)]).$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} S_0(M) &= A \quad [\text{resp. } \Lambda_0(M) = A], \\ S_1(M) &= M \quad [\text{resp. } \Lambda_1(M) = M], \\ S_q(M) &= 0 \quad [\text{resp. } \Lambda_q(M) = 0] \quad \text{pour } q < 0. \end{aligned}$$

Soit $\beta :$

$$M \rightarrow S(M) \quad [\text{resp. } \gamma : M \rightarrow \Lambda(M)]$$

l'application linéaire composée

$$M \xrightarrow{\alpha} T(M) \rightarrow S(M) \quad [\text{resp. } M \xrightarrow{\alpha} T(M) \rightarrow \Lambda(M)].$$

— β (resp. γ) est une injection. On la dira canonique.

— L'algèbre $S(M)$ [resp. $\Lambda(M)$] est unique à un isomorphisme près; on l'appelle algèbre symétrique (resp. extérieure) du A -module M .

Désignons par U l'un quelconque des trois symboles T , S , Λ . Il est connu (cf. [10]) que

THÉORÈME 1. — *Soit A un anneau, M et N deux A -modules. U est un foncteur covariant, défini dans la catégorie des A -modules, à valeurs dans la catégorie des A -algèbres graduées. De plus, si $\varphi : M \rightarrow N$ est une application A -linéaire surjective, $[U(\varphi) : U(M) \rightarrow U(N)]$ est un homomorphisme surjectif de A -algèbres graduées et $\text{Ker}(U(\varphi))$ est l'idéal bilatère de $U(M)$ engendré par $\text{Ker}(\varphi)$ identifié à un sous- A -module de $U(M)$.*

Mais le foncteur U ne transforme pas généralement une injection en une injection, ainsi que le montrent les exemples suivants :

Exemple 1. — Soit k un corps de caractéristique zéro.

— Posons $A = k[x, y, z]$, avec $z^2 = xy$; $M = A(x, z)$; $N = A$, et soit $\varphi : M \rightarrow N$ l'injection canonique.

Alors ni $T(\varphi)$ ni $\Lambda(\varphi)$ ne sont injectives (cf. [11]).

Exemple 2. — Soit k un corps. Posons $A = k[x, y]$, avec $y^2 = x^3$; $M = A(x, y)$; $N = A$ et soit, $\varphi : M \rightarrow N$ l'injection canonique.

Alors $S(\varphi)$ n'est pas injective (cf. [12]).

PROPOSITION 1. — *Soit A un anneau et M un A -module. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) M est un A -module projectif;
- (2) $U(M)$ est un A -module projectif;
- (3) Pour tout $q \in \mathbb{Z}$, $U_q(M)$ est un A -module projectif.

PROPOSITION 2. — Soit A un anneau et M un A -module. Si M est plat, alors $U(M)$ est plat.

En effet, U commute aux limites inductives filtrantes et il suffit d'utiliser les résultats de [13].

PROPOSITION 3. — Soit A un anneau intègre, M et N deux A -modules et $\varphi : M \rightarrow N$ une application linéaire injective. Alors :

- (1) $\text{Ker}(U(\varphi)) \subset t(U(M))$;
- (2) Si $U(N)$ est sans torsion, alors $\text{Ker}(U(\varphi)) = t(U(M))$.

Soit K le corps des fractions de A . La suite $0 \rightarrow M \rightarrow N$ de A -modules est exacte, donc sa tensorisée par K , plat sur A , est une suite exacte de K espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow M \otimes_A K \xrightarrow{\varphi \otimes 1_K} N \otimes_A K.$$

Alors la suite de A -modules

$$0 \rightarrow U(M \otimes K) \rightarrow U(N \otimes K)$$

qui s'écrit encore

$$0 \rightarrow U(M) \otimes_A K \xrightarrow{U(\varphi) \otimes 1_K} U(N) \otimes_A K$$

est exacte. Soit $u \in \text{Ker}(U(\varphi))$:

$$(0 = U(\varphi)(u)) \iff (U(\varphi)(u) \otimes_1 1 = 0);$$

$$U(\varphi)(u) \otimes_1 1 = (U(\varphi) \otimes 1_K)\left(u \otimes_1 1\right)$$

et $U(\varphi) \otimes 1_K$ est injective. Alors

$$(0 = U(\varphi)(u)) \iff \left(u \otimes_1 1 = 0\right) \iff ((\exists c \in A, c \neq 0) (cu = 0)),$$

d'où (1).

(2) se déduit immédiatement de (1).

PROPOSITION 4. — Soit A un anneau, M et N deux A -modules et $\varphi : M \rightarrow N$ une application A -linéaire injective. Si $\varphi(M)$ admet un supplémentaire dans N , alors $U(\varphi) : U(M) \rightarrow U(N)$ est un homomorphisme injectif de A -algèbres graduées.

2. LE THÉORÈME DE SYLVESTER-FRANCKE. — Dans ce paragraphe nous généraliserons un résultat connu de Sylvester, dans le cas de l'Algèbre extérieure d'un espace vectoriel de dimension finie (*cf.* [14]).

THÉORÈME 2. — Soit A un anneau, L un A -module libre de dimension finie q , et soit $\varphi : L \rightarrow L$ un A -endomorphisme de L .

Alors $U_n(\varphi) : U_n(L) \rightarrow U_n(L)$ est un A -endomorphisme de $U_n(L)$ et

$$\det(U_n(\varphi)) = (\det(\varphi))^{\nu(n, q)},$$

où $\nu(n, q)$ est un entier défini comme suit :

- (1) Si $U = T : \nu(n, q) = nq^{n-1}$;
- (2) Si $U = S : \nu(n, q) = \binom{n+q-1}{q}$;
- (3) Si $U = A : \nu(n, q) = \binom{q-1}{n-1}$.

Soit $(e_1, \dots, e_q)$ une base de L sur A et soit (a_{ji}) la matrice de φ relativement à cette base.

L'homomorphisme d'anneau

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow A \\ m &\sim m + 1 \end{aligned}$$

a pour noyau l'idéal (p) , p étant la caractéristique de A . Donc $Z/(p)$ est isomorphe à un sous-anneau de A , donc aussi $Z/(p)[a_{ji}]_{1 \leq i, j \leq q}$.

Soit $(X_{ji})_{1 \leq i, j \leq q}$ des indéterminées sur Z et considérons l'homomorphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} Z[X_{ji}]_{1 \leq i, j \leq q} &\longrightarrow Z/(p)[a_{ji}]_{1 \leq i, j \leq q}, \\ m \in Z &\sim \text{classe de } m \pmod{(p)}, \\ X_{ji} &\sim a_{ji}, \end{aligned}$$

il transforme toute formule dans $Z[X_{ji}]$ en formule dans $Z/(p)[a_{ji}]$, donc dans A .

Il suffit alors de démontrer le théorème pour $A = Z[X_{ji}]_{1 \leq i, j \leq q}$. Soit K le corps des fractions de A et Ω une clôture algébrique de K . L'endomorphisme $\varphi : A^q \rightarrow A^q$ définit par produit tensoriel un

endomorphisme $\varphi \otimes 1 : \Omega^q \rightarrow \Omega^q$, car $\Lambda^q \otimes \Lambda \Omega = \Omega^q$. D'autre part, $(e_1 \otimes 1, \dots, e_q \otimes 1)$ est une base du Ω espace vectoriel Ω^q . Alors :

$$(\varphi \otimes 1)(e_j \otimes 1) = \varphi(e_j) \otimes 1 = \left(\sum_{i=1}^q \lambda_{ji} e_i \right) \otimes 1 = \sum_{i=1}^q \lambda_{ji} (e_i \otimes 1).$$

Donc

(1)

$$\det \varphi = \det \varphi \otimes 1.$$

Puisque

$$U_n(\Omega^q) = U_n(\Lambda^q) \otimes \Omega, \quad U_n(\varphi \otimes 1) = U_n(\varphi) \otimes 1.$$

Donc

(2)

$$\det(U_n(\varphi \otimes 1)) = \det(U_n(\varphi) \otimes 1).$$

De (1) il résulte que

$$\det(U_n(\varphi) \otimes 1) = \det(U_n(\varphi))$$

et il suffit donc de démontrer la formule du théorème pour

$$\det(\varphi \otimes 1) \quad \text{et} \quad \det(U_n(\varphi \otimes 1)).$$

$\varphi \otimes 1$ est diagonalisable car la matrice est générique et Ω est algébriquement clos (cf. [15]). Soient $b_1, \dots, b_q$ les q valeurs propres distinctes et soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$ les vecteurs propres correspondants : $(\varphi \otimes 1)(\varepsilon_i) = b_i \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq q$, et la matrice de $\varphi \otimes 1$ par rapport à la base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_q \end{pmatrix}.$$

Alors une base de $T_n(\Omega^q)$ est formée des produits

$$(\varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n}), \quad i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, q\}.$$

Elle a q^n éléments.

Une base de $S_n(\Omega^q)$ est formée des produits

$$(\varepsilon_1^{n(i)} \dots \varepsilon_q^{n(i)}), \quad \sum_i n(i) = n.$$

Elle a $\binom{n+q-1}{q-1}$ éléments.

Une base de $\Lambda_n(\Omega^q)$ est formée des produits

$$(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_n}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq q.$$

Elle a $\binom{q}{n}$ éléments.

D'autre part,

$$\begin{aligned} T_n(\varphi \otimes 1)(\varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n}) &= (\varphi \otimes 1)(\varepsilon_{i_1}) \otimes \dots \otimes (\varphi \otimes 1)(\varepsilon_{i_n}) \\ &= b_{i_1} \dots b_{i_n}(\varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n}), \\ S_n(\varphi \otimes 1)(\varepsilon_1^{n(1)} \dots \varepsilon_q^{n(q)}) &= (\varphi \otimes 1)(\varepsilon_1)^{n(1)} \dots (\varphi \otimes 1)(\varepsilon_q)^{n(q)} \\ &= b_1^{n(1)} \dots b_q^{n(q)}(\varepsilon_1^{n(1)} \dots \varepsilon_q^{n(q)}), \\ \Lambda_n(\varphi \otimes 1)(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_n}) &= (\varphi \otimes 1)(\varepsilon_{i_1}) \wedge \dots \wedge (\varphi \otimes 1)(\varepsilon_{i_n}) \\ &= b_{i_1} \dots b_{i_n}(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_n}). \end{aligned}$$

D'où les matrices — diagonales — de $T_n(\varphi \otimes 1)$, $S_n(\varphi \otimes 1)$, $\Lambda_n(\varphi \otimes 1)$ relativement aux bases ci-dessus définies

$$\begin{bmatrix} b_1^n & & & \\ & b_1^{n-1} b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_1^{n-2} b_2^2 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & b_q^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^n & & & \\ & b_1^{n-1} b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_q^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 b_2 \dots b_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{q-n+1} \dots b_q & \end{bmatrix}$$

et leurs déterminants respectifs :

$$\det T_n(\varphi \otimes 1) = \prod_{i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, q\}} b_{i_1} \dots b_{i_n};$$

$$\det S_n(\varphi \otimes 1) = \prod_{\sum_i n(i) = n} b_1^{n(1)} \dots b_q^{n(q)};$$

$$\det \Lambda_n(\varphi \otimes 1) = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq q} b_{i_1} \dots b_{i_n}.$$

Pour j fixé, soit $\nu(n, q)$ le nombre de facteurs b_j dans $\det U_n(\varphi \otimes 1)$. Alors : $\det U_n(\varphi \otimes 1) = (b_1 \dots b_q)^{\nu(n, q)}$ et contient donc $q \nu(n, q)$ facteurs b_i , $1 \leq i \leq q$.

— Dans $\det T_n(\varphi \otimes 1)$ il y a q^n produits $(b_{i_1} \dots b_{i_n})$ et n termes dans chacun d'eux. Donc nq^n facteurs b_i .

— Dans $\det S_n(\varphi \otimes 1)$ il y a $\binom{n+q-1}{q-1}$ produits $(b_1^{n_1} \dots b_q^{n_q})$ et n termes dans chacun d'eux. Donc $n \binom{n+q-1}{q-1}$ facteurs b_i .

— Dans $\det \Lambda_n(\varphi \otimes 1)$ il y a $\binom{q}{n}$ produits $(b_{i_1} \dots b_{i_n})$ et n termes dans chacun d'eux. Donc $n \binom{q}{n}$ facteurs b_i .

D'où les valeurs annoncés de $v(n, q)$.

3. BONTÉ ET ALGÈBRES UNIVERSELLES. — Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A , E un A -module, E' un sous- A -module de E , $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique, U l'un quelconque des foncteurs T, S, Λ .

Le but de ce paragraphe est l'étude du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 U(E') & \xrightarrow{\quad} & U(E'/\mathfrak{a}E') \simeq U(E')/\mathfrak{a}U(E') & & \\
 \downarrow U(\varphi) & \swarrow E' \xrightarrow{\quad} E'/\mathfrak{a}E' & \downarrow \bar{\varphi} & \searrow & \\
 & \downarrow \varphi & & & \\
 & E \xrightarrow{\quad} E/\mathfrak{a}E & & & \\
 & \downarrow & & & \\
 U(E) & \xrightarrow{\quad} & U(E/\mathfrak{a}E) \simeq U(E)/\mathfrak{a}U(E) & & \\
 & & \downarrow U(\bar{\varphi}) = \overline{U(\varphi)} & &
 \end{array}$$

On sait que l'injectivité de φ n'entraîne ni celle de $\bar{\varphi}$, ni celle de $U(\varphi)$; que celle de $U(\bar{\varphi})$ n'est entraînée ni par celle de $U(\varphi)$ ni par celle de $\bar{\varphi}$. Cependant :

PROPOSITION 5. — Soit A un anneau, E un A -module, E' un sous- A -module de E , $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique. Si E est un A -module plat et si pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de type fini de A , $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$, alors $U(\varphi)$ est injectif.

En effet, E/E' est plat (cf. chap. I) et ceci suffit (cf. [13]) pour que φ se prolonge en une injection $U(\varphi) : U(E') \rightarrow U(E)$.

PROPOSITION 6. — Soit A un anneau intègre, E un A -module, E' un sous- A -module plat de E , $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique,

$\mathfrak{a}$ un idéal de A . Alors $U(\varphi)$ est injectif et si $E'/\mathfrak{a}E'$ est plat et si $\bar{\varphi}$ est injectif, alors $U(\bar{\varphi})$ est injectif.

En effet, $U(E')$ est plat (cf. [13]). Alors A étant intègre, $t(U(E')) = 0$ et par la proposition 3 (chap. II), $\text{Ker}(U(\varphi)) = 0$.

De même, si $E'/\mathfrak{a}E'$ est plat et $\bar{\varphi}$ injectif, $\text{Ker}(U(\bar{\varphi})) = 0$.

PROPOSITION 7. — Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal premier de A , E un A -module, E' un sous- A -module libre et de type fini de E , $\varphi: E' \rightarrow E$ l'injection canonique. Alors si $\bar{\varphi}$ est injectif, $U(\bar{\varphi})$ est injectif.

Soit q' la dimension de E' . Écrivons la démonstration dans le cas $U = S$. Le diagramme dessiné plus haut prend alors la forme :

$$\begin{array}{ccc}
 A[Y_1, \dots, Y_{q'}] & \xrightarrow{\quad} & A[Y_1, \dots, Y_{q'}]/\mathfrak{a}[Y_1, \dots, Y_{q'}] \\
 \downarrow S(\varphi) & \searrow \begin{array}{c} E' \rightarrow E'/\mathfrak{a}E' \\ \varphi \downarrow \quad \downarrow \bar{\varphi} \\ E \rightarrow E/\mathfrak{a}E \end{array} & \downarrow S(\bar{\varphi}) \\
 S(E) & \xrightarrow{\quad} & S(E)/\mathfrak{a}S(E)
 \end{array}$$

En effet, l'algèbre symétrique d'un A -module libre de dimension q' est isomorphe à l'anneau des polynômes à q' indéterminées sur A . D'autre part, $\mathfrak{a}[Y_1, \dots, Y_{q'}]$ désigne l'idéal de $A[Y_1, \dots, Y_{q'}]$ des polynômes à coefficients dans $\mathfrak{a}$.

— Soit $\bar{u}'$ un élément de $\text{Ker}S(\bar{\varphi})$ et soit u' un représentant de degré s par exemple de u' dans $A[Y_1, \dots, Y_{q'}]$,

$$u' = \sum_{m_1 + \dots + m_{q'} = s} b'_{m_1, \dots, m_{q'}} Y_1^{m_1} \dots Y_{q'}^{m_{q'}}.$$

— La proposition 3 du chapitre II, appliquée aux $A/\mathfrak{a}$ -modules $E'/\mathfrak{a}E'$ et $E/\mathfrak{a}E$ montre que $\bar{u}' \in t(A[Y_1, \dots, Y_{q'}]/\mathfrak{a}[Y_1, \dots, Y_{q'}])$. Donc il existe un élément $\dot{c}$ non nul dans $A/\mathfrak{a}$, tel que $\dot{c} \cdot \bar{u}' = 0$.

— $\dot{c} \cdot \bar{u}' = \overline{c}u'$, donc

$$cu' = \sum_{m_1 + \dots + m_{q'} = s} cb'_{m_1, \dots, m_{q'}} Y_1^{m_1} \dots Y_{q'}^{m_{q'}}$$

est un élément de $\mathfrak{a}[Y_1, \dots, Y_{q'}]$, donc $cb'_{m_1 \dots m_{q'}}$ est dans $\mathfrak{a}$, donc $b'_{m_1 \dots m_{q'}}$ est dans $\mathfrak{a}$, donc $u' = 0$.

Remarque 1. — La démonstration se fait de même pour $U = T$ et $U = \Lambda$. Dans le premier cas on calculera sur des polynômes non commutatifs, et dans le second cas sur des polynômes anticommutatifs.

THÉOREME 3. — *Soit A un anneau intègre et $\mathfrak{a}$ un idéal premier de A . Soit E un A -module et E' un sous- A -module libre, de type fini de E , $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique. Alors $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ entraîne $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, U(E'), U(E))$.*

C'est une conséquence immédiate des propositions 6 et 7.

PROPOSITION 8. — *Soit A un anneau, E un A -module, E' un sous- A -module de E , $\varphi : E' \rightarrow E$ l'injection canonique. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A et notons $\varphi_{\mathfrak{M}}$ l'application $\varphi \otimes_A 1_{A/\mathfrak{M}}$. Alors :*

(1) *Si pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$, $U(\varphi_{\mathfrak{M}})$ est injectif, $U(\varphi)$ est injectif;*

(2) *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A , $\bar{\varphi} : E'/\mathfrak{a}E' \rightarrow E/\mathfrak{a}E$ et notons $\bar{\varphi}_{\mathfrak{M}}$ l'application $\bar{\varphi} \otimes_{A/\mathfrak{M}}$. Alors si pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A , $U(\bar{\varphi}_{\mathfrak{M}})$ est injectif, $U(\bar{\varphi})$ est injectif.*

Posons $E_{\mathfrak{M}} = E \otimes_A A/\mathfrak{M}$. Alors $U(E_{\mathfrak{M}}) = U(E)_{\mathfrak{M}}$.

$\varphi_{\mathfrak{M}}$ est injectif, car $A/\mathfrak{M}$ est plat. D'autre part, le calcul qui permettrait de déduire l'injectivité de φ de celle de $\varphi_{\mathfrak{M}}$ pour tout est classique. Or

$$U(\varphi_{\mathfrak{M}}) = U(\varphi \otimes 1_{A/\mathfrak{M}}) = U(\varphi) \otimes 1_{A/\mathfrak{M}}, \quad \text{d'où (1).}$$

D'autre part,

$$\bar{\varphi} : E'/\mathfrak{a}E' \rightarrow E/\mathfrak{a}E \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_{\mathfrak{M}} = \bar{\varphi} \otimes 1_{A/\mathfrak{M}},$$

alors

$$U(\bar{\varphi}_{\mathfrak{M}}) = U(\bar{\varphi} \otimes 1_{A/\mathfrak{M}}) = U(\bar{\varphi}) \otimes 1_{A/\mathfrak{M}}, \quad \text{d'où (2).}$$

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de la proposition 8, si $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, U(E'_{\mathfrak{M}}), U(E_{\mathfrak{M}}))$ — ce qui équivaut à $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}}, U(E'_{\mathfrak{M}}), U(E_{\mathfrak{M}}))$ — alors*

$$\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, U(E'), U(E)).$$

En effet,

$$\begin{aligned} U(E_{\mathfrak{M}})/\mathfrak{a}U(E_{\mathfrak{M}}) &= U(E_{\mathfrak{M}}) \otimes A/\mathfrak{a} = (U(E) \otimes A_{\mathfrak{M}}) \otimes A/\mathfrak{a} \\ &= U(E) \otimes A/\mathfrak{a} \otimes A_{\mathfrak{M}} = U(E)/\mathfrak{a}U(E) \otimes A_{\mathfrak{M}}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 4. — *Soit A un anneau intègre et $\mathfrak{a}$ un idéal premier de A. Soit E un A-module et E' un sous-A-module de E, projectif de type fini, $\varphi: E' \rightarrow E$ l'injection canonique. Alors $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$ entraîne $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, U(E'), U(E))$.*

En effet, pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, $E'_{\mathfrak{M}}$ est un $A_{\mathfrak{M}}$ -module libre et de type fini. On utilise alors la proposition 7 du chapitre I, puis le théorème 3 du chapitre II et il suffit de délocaliser selon le corollaire de la proposition 8.

THÉORÈME 5. — *Soit A un anneau, E un A-module libre de rang q, E' un sous-A-module libre de rang q' de E, $\varphi: E' \rightarrow E$ l'injection canonique. Alors $U(\varphi)$ est injectif et si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A tel que $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, E', E)$, alors $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, U(E'), U(E))$.*

Dans les conditions du théorème, soit $(e_i)_{1 \leq i \leq q}$ et $(f'_j)_{1 \leq j \leq q'}$ les bases utilisées de E et E' respectivement, et (a_{ji}) la matrice de φ y relative. Soit $E_{i_1, \dots, i_{q'}}$ le sous-A-module de E engendré par $e_{i_1}, \dots, e_{i_{q'}}$, pris parmi les vecteurs de la base (e_i) . Notons $p_{i_1, \dots, i_{q'}}$ la projection canonique $E \rightarrow E_{i_1, \dots, i_{q'}}$. Alors $p_{i_1, \dots, i_{q'}} \circ \varphi$ est un homomorphisme entre deux A-modules de même dimension auquel on peut appliquer le théorème 2 du chapitre II et

$$\det U_n(p_{i_1, \dots, i_{q'}} \circ \varphi) = \det(p_{i_1, \dots, i_{q'}} \circ \varphi)^{v(n, q')}.$$

Or $\det(p_{i_1, \dots, i_{q'}} \circ \varphi)$ est le mineur de la matrice (a_{ji}) formé des lignes $i_1, \dots, i_{q'}$, soit $d_{i_1, \dots, i_{q'}}$.

D'autre part,

$$U_n(p_{i_1, \dots, i_{q'}} \circ \varphi) = U_n(p_{i_1, \dots, i_{q'}}) \circ U_n(\varphi)$$

et par rapport aux bases correspondantes (cf. démonstration du théorème 2, chap. II) de $U_n(E')$ et $U_n(E_{i_1, \dots, i_{q'}})$, $\det U_n(p_{i_1, \dots, i_{q'}} \circ \varphi)$ est le mineur de $U_n(\varphi)$ formé des lignes, obtenues comme coefficients des vecteurs de base ne contenant que les indices $i_1, \dots, i_{q'}$, de la matrice de $U_n(\varphi)$. Les mineurs de $U_n(\varphi)$ sont donc, d'après

le théorème 2 du chapitre II, les puissances $\nu(n, q')^{\text{ièmes}}$ des mineurs $d_{i_1, \dots, i_{q'}}$ définis ci-dessus.

Or φ est injectif, donc il n'existe aucun scalaire μ non nul annulant tous les mineurs $d_{i_1, \dots, i_{q'}}$, donc aucun scalaire μ non nul annulant toutes leurs puissances $\nu(n, q')^{\text{ièmes}}$.

Ceci résulte de la remarque suivante. Considérons s scalaires a_i tels que

$$(\forall i, 1 \leq i \leq s, \mu a_i = 0) \quad (\mu \neq 0)$$

et supposons qu'il existe $\mu_0 \neq 0$ annulant les puissances $\nu^{\text{ièmes}}$ des a_i pour tout $i, 1 \leq i \leq s$

$$\begin{aligned} (\mu_0 \neq 0) & \quad (\exists i_1, 1 \leq i_1 \leq s, \mu_0 a_{i_1} \neq 0) \\ \Rightarrow & \quad (\exists i_2, 1 \leq i_2 \leq s, (\mu_0 a_{i_1}) a_{i_2} \neq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots) \end{aligned}$$

Il est inévitable d'arriver à

$$(\exists i_k, 1 \leq i_k \leq s, (\mu_0 a_{i_1}^{\nu(i_1)} a_{i_2}^{\nu(i_2)} \dots a_{i_k}^{\nu(i_k)} \dots) a_{i_k} \neq 0).$$

Or $\mu_0(a_{i_k})^\nu = 0$. D' où la contradiction cherchée.

Soit alors $\mathfrak{a}$ un idéal de A et $\bar{\varphi} : E'/\mathfrak{a}E' \rightarrow E/\mathfrak{a}E$. On sait que $U(\bar{\varphi}) = \overline{U(\varphi)}$. Les matrices de $\bar{\varphi}$ et $U(\bar{\varphi})$ respectivement s'obtiennent par réduction modulo $\mathfrak{a}$ des éléments de celles de φ et $U(\varphi)$. On déduit l'injectivité de $U_n(\bar{\varphi})$ pour tout n de celle de $\bar{\varphi}$, ceci achevant la démonstration du théorème.

Remarque. — On peut penser que le théorème 5 est encore vrai de deux A -modules E et E' plats puisqu'ils sont alors limite inductive de libres.

CHAPITRE III.

BONTÉ ET ANNEAUX DE POLYNOMES.

1. INTRODUCTION. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B , $A[X]$ et $B[X]$ les anneaux de polynômes à une indéterminée à coefficients dans A et B respectivement. Le but de ce chapitre est d'établir des relations entre les propriétés $\mathbf{B}_1(A, B)$ et $\mathbf{B}_1(A[X], B[X])$. Nous les savons (*cf.* chap. I) étroitement liées

à celles de platitude et fidèle platitude du grand anneau sur le petit. D'autre part :

DÉFINITION. NOTATIONS. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B , $A[X]$ et $B[X]$ les anneaux de polynômes correspondants. Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de $A[X]$ et soit $\mathfrak{B}$ son extension à $B[X]$. Pour un entier $n \geq 0$, soit $d_n(\mathfrak{A})$ l'ensemble des polynômes de $\mathfrak{A}$ de degré $\leq n$ [resp. $d_n(\mathfrak{B})$]. Alors nous écrirons :

$P_2(\mathfrak{A}, n)$ la proposition :

$$d_n(\mathfrak{B}) = B d_n(\mathfrak{A}) ;$$

$P_3(\mathfrak{A})$ la proposition :

tout polynôme $P \in \mathfrak{B}$ s'écrit $\sum_j b_j B_j$, avec $b_j \in B$, $B_j \in \mathfrak{A}$, $d^0 B_j \leq d^0 P$, pour tout j .

2. ÉTUDE DE CES PROPRIÉTÉS.

PROPOSITION 1. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B . Si B est plat (resp. fidèlement plat) sur A , alors $B[X]$ est plat (resp. fidèlement plat) sur $A[X]$.

PROPOSITION 2. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B $\mathfrak{A}$ un idéal de $A[X]$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $P_3(\mathfrak{A})$;
- (2) $P_2(\mathfrak{A}, n)$ pour tout $n \geq 0$.

Si, de plus, B est plat sur A , alors $P_2(\mathfrak{A}, n)$ pour tout $\mathfrak{A}$ et tout $n \geq 0$.

Les démonstrations sont sans difficultés à partir des définitions et des résultats établis dans [1].

PROPOSITION 3. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B . Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de $A[X]$ et $\mathfrak{B}$ son extension à $B[X]$. Alors si B est noethérien, il existe un entier n_0 tel que :

- (1) Pour tout $n \geq n_0$,

$$d_{n+1}(\mathfrak{B}) = d_n(\mathfrak{B}) + \bigcup d_n(\mathfrak{B}) ;$$

(2) S'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que

$$d_{n_1}(\mathfrak{a}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B} d_{n_1}(\mathfrak{A}),$$

alors pour tout $k \geq 0$,

$$d_{n_1+k}(\mathfrak{a}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B} d_{n_1+k}(\mathfrak{A}).$$

PROPOSITION 4. — Soit $\mathfrak{B}$ un anneau, $\mathfrak{A}$ un sous-anneau de $\mathfrak{B}$. Alors :

- (1) $\mathbf{P}_3(\mathfrak{A})$ pour tout idéal homogène $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}[X]$;
- (2) Si $\mathfrak{B}$ est intègre, alors $\mathbf{P}_3(\mathfrak{A})$ pour tout idéal principal $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}[X]$.

THÉORÈME 1. — Soit $\mathfrak{B}$ un anneau, $\mathfrak{A}$ un sous-anneau de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{A}$.

Si $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}\mathfrak{A}[X], \mathfrak{A}[X], \mathfrak{B}[X])$, alors $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

D'après la proposition 5 (chap. I), $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, \mathfrak{A}[X], \mathfrak{B}[X])$.

D'autre part $\mathfrak{A}[X]$ est bon sur $\mathfrak{A}$. Alors d'après la proposition 3 (chap. I), $\mathbf{B}_2(\mathfrak{a}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}[X])$ et donc $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

COROLLAIRE 1. — Si $\mathbf{B}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}[X], \mathfrak{B}[X])$ pour tout idéal $\mathfrak{A}$ extension à $\mathfrak{A}[X]$ d'un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{A}$, alors $\mathbf{B}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

COROLLAIRE 2. — Si $\mathbf{B}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}[X], \mathfrak{B}[X])$ pour tout idéal $\mathfrak{A}$ principal de $\mathfrak{A}[X]$, alors $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ principal de $\mathfrak{A}$.

Le corollaire 1 est clair et si $\mathfrak{a}$ est principal dans $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{A}[X]$ est principal dans $\mathfrak{A}[X]$, d'où le corollaire 2.

THÉORÈME 2. — Soit $\mathfrak{B}$ un anneau intègre, $\mathfrak{A}$ un sous-anneau de $\mathfrak{B}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) Pour tout idéal principal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{A}$, $\mathbf{B}_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$;
- (2) Pour tout idéal principal $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}[X]$, $\mathbf{B}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}[X], \mathfrak{B}[X])$;

Le corollaire 2 prouve que (2) implique (1). Montrons que (1) implique (2). Soit le corps des fractions de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$ le corps des fractions de $\mathfrak{B}$. Soit (f) un idéal principal de $\mathfrak{A}[X]$ et soit $\mathbf{P} \in (f) \mathfrak{B}[X] \cap \mathfrak{A}[X]$.

— Il existe dans $\mathfrak{H}[X]$ deux polynômes, uniques, q et r , avec $d^0 r < d^0 f$, et tels que $\mathbf{P} = fq + r$.

— D'autre part, $P = fS$, $S \in B[X]$.

Ces deux décompositions de P , écrites dans $K[X]$ ne sont pas distinctes.

Donc $r = 0$, $q = S$, et

$$S \in \Pi[\Lambda], \quad S = \sum_{i=1}^n u_i X^i, \quad u_i \in \Pi \cap B,$$

alors $u_i = \frac{a_i}{b_i}$, $a_i, b_i \in A$, donc $u_i b_i \in A \cap (b_i)B = (b_i)$, donc $u_i \in A$, donc $S \in A[X]$, donc $P \in (f)$.

THÉORÈME 3. — Soit B un anneau, A un sous-anneau de B . Si $\mathbf{B}_1(A, B)$ et si B est plat sur A [resp. si pour tout idéal $\mathfrak{A}$ de $A[X]$, $\mathbf{P}_3(\mathfrak{A})$], alors $\mathbf{B}_1(A[X], B[X])$.

1° Si B est bon sur A et plat sur A , d'après le théorème 6 du chapitre I, il est fidèlement plat sur A . Alors, d'après la proposition 1 du chapitre II, $B[X]$ est fidèlement plat sur $A[X]$. Donc $\mathbf{B}_1(A[X], B[X])$.

2° Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de $A[X]$ et soit $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble formé de zéro et des coefficients dominants des polynômes de degré n de $\mathfrak{A}$. C'est un idéal de A . Soit $\mathfrak{B}$ l'extension à $B[X]$ de $\mathfrak{A}$, posons $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B} \cap A[X]$ et soit $\mathfrak{A}'_n$ l'ensemble formé de zéro et des coefficients dominants des polynômes de degré n de $\mathfrak{A}'$.

— Plaçons-nous dans le cas où A est noethérien, et soit P un polynôme de $\mathfrak{A}'$

$$P = \alpha X^n + \dots, \quad \alpha \in \mathfrak{A}'_n;$$

$$P = \sum_j B_j b_j, \quad b_j \in B, \quad B_j \in \mathfrak{A}, \quad d^0 B_j \leq d^0 P \text{ pour tout } j$$

et soit β_j le coefficient dominant de B_j , $\beta_j \in \mathfrak{A}_n$,

$$\alpha = \sum_{j=1}^m \beta_j b_j \in \mathfrak{A}_n B \cap A, \quad \text{donc } \alpha \in \mathfrak{A}'_n.$$

Or si pour tout n , $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}'_n$, alors $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. Ce résultat se trouve dans [16], par exemple.

— Soit alors A un anneau quelconque. On se ramène au cas noethérien en posant $R = \mathbb{Z}$ [coefficients de P , coefficients des B_j]. Soit $\wp$ l'idéal engendré par les B_j dans $R[X]$ et soit $S = R[(b_j)]$. Alors le polynôme P de $\mathfrak{A}'$ appartient à $\wp S[X] \cap R[X]$, donc à $\wp$, donc à $\mathfrak{A}$.

3. ÉTUDE D'EXEMPLES.

EXEMPLE 1. — Soit k un corps, $A = k[u, \wp]$, $B = k\left[u, \frac{\wp}{u}\right]$. Alors :

- (1) B n'est pas plat sur A ;
- (2) B n'est pas bon sur A ;
- (3) il existe un idéal $\mathfrak{A}$ de $A[X]$ et un entier $n \geq 0$ tels qu'on n'ait pas $P_2(\mathfrak{A}, n)$.

$$(1) \quad \wp \in (\wp)B; \quad \wp = u \frac{\wp}{u} \in (u)B; \quad \wp \notin (u\wp)B.$$

Or $B(u\wp) = B[(u) \cap (\wp)]$, donc $(u)B \cap \wp(B)$ n'égale pas $B[(u) \cap (\wp)]$. D'où (cf. [1]), (1).

$$(2) \quad \wp^2 \in A; \quad \wp^2 = u\wp \frac{\wp}{u} \in (u\wp)B; \quad \wp^2 \notin (u\wp).$$

(3) Soit $\mathfrak{A}$ l'idéal de $A[X]$ engendré par les polynômes $P_1 = uX + \wp$ et $P_2 = \wp X + u$. D'une part,

$$\wp P_1 - u P_2 = \wp^2 - u^2 \in d_0(\mathfrak{A}).$$

D'autre part, soit $P = (uX + \wp) \sum_{i=0}^s (a_i X^i) - (\wp X + u) \sum_{i=0}^n (b_i X^i)$ un polynôme de $\mathfrak{A}$. Supposons $n \leq s$ et n pair, égal à $2p$. Écrivons que P se réduit à son terme constant $a_0 \wp - b_0 u$. Les conditions obtenues sur les coefficients conduisent à l'existence d'éléments c_i dans A tels que

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \wp + c_1 u + c_2 \wp + \dots + c_{2p-1} u + c_{2p} \wp, \\ b_0 &= c_0 u + c_1 \wp + c_2 u + \dots + c_{2p-1} \wp + c_{2p} u. \end{aligned}$$

D'où

$$a_0 \wp - b_0 u = (\wp^2 - u^2) \sum_{i=0}^p c_{2i}$$

et, de même, pour n impair. Donc tout polynôme de $d_0(\mathfrak{A})$ est multiple de $v^2 - u^2$.

Or

$$\frac{v}{u}(uX + v) - (vX + u) = \frac{v^2}{u} - u = \frac{1}{u}(v^2 - u^2)$$

est donc élément de $d_0(\mathfrak{B})$, mais non de $Bd_0(\mathfrak{A})$.

EXEMPLE 2. — Rappelons la situation définie dans la remarque 6 (chap. I). L'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est muni d'une somme par composantes et du produit $(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$. C'est alors un anneau à élément unité, commutatif, non intègre, contenant $\mathbb{Z}$, soit B . $B[X]$ est isomorphe au produit $\mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ muni des lois déduites de celles de B .

Alors :

(1) $B_1(\mathbb{Z}, B)$ et $B_1(\mathbb{Z}[X], B[X])$;

(2) B n'est pas plat sur $\mathbb{Z}$.

(3) Il existe un idéal $\mathfrak{A}$ de $\mathbb{Z}[X]$ et un entier $p \geq 0$ tels qu'on n'ait pas $P_2(\mathfrak{A}, p)$.

(1) Il est facile de montrer (1) par le calcul.

(2) B n'est pas un $\mathbb{Z}$ -module sans torsion, d'où (2).

(3) Soit $\mathfrak{A} = (1 + nX)$; $d_0(\mathfrak{A}) = (0)$, donc $Bd_0(\mathfrak{A}) = (0)$.

Or $1 + nX = (1, 0) + (0, n)X$ est un polynôme de $B[X]$ et

$$\begin{aligned} (0, x)(1 + nX) &= (0, x)(1, 0) + (0, x)(0, n)X \\ &= (0, x) + (0, nx)X = (0, x) \in d_0(\mathfrak{B}) \end{aligned}$$

d'où (3).

CHAPITRE IV.

BONTÉ ET ANNEAUX DE DÉCOMPOSITION.

1. INTRODUCTION. — Soit A un anneau et B un sur-anneau de A , entier sur A . On sait qu'alors (cf. [16]) pour tout idéal p premier de A , il existe un idéal premier p' de B tel que $p' \cap A = p$. Donc un anneau B entier sur un de ses sous-anneaux A est bon

pour tout idéal premier de A . Nous avons vu (*cf.* prop. 13, chap. I) que l'anneau $\bar{A}$, fermeture intégrale de l'anneau A principal dans la clôture algébrique de son corps des fractions était bon sur A . Les propriétés pour un anneau B d'être sur un sous-anneau A , soit bon, soit entier sont donc liées.

D'autre part, étant donné un anneau A , un polynôme unitaire de $A[X]$ ne s'y décompose pas en général en produit de polynômes de degré 1. Mais si A est intègre tout polynôme unitaire de $\bar{A}(X)$ s'y décompose en produit de polynômes de degré 1. En effet,

soit $P = \sum_{i=0}^p \bar{a}_i X^i$, $\bar{a}_i \in \bar{A}$, un polynôme de $\bar{A}[X]$: il a p racines ω_i dans Ω , chacune est entière sur $\bar{A}$, donc sur A , donc est dans $\bar{A}$. Ce qui nous conduit aux :

DÉFINITION 1. — Un anneau B tel que tout polynôme unitaire de $B[X]$ s'y décompose en produit de polynômes de degré 1 sera dit anneau (Π) .

DÉFINITION 2. — Un anneau (Π) entier sur l'un de ses sous-anneaux A sera dit anneau (Π_A) .

Le but de ce chapitre est la construction à partir d'un anneau A d'un anneau (Π_A) , bon sur A , et l'étude des propriétés de tels anneaux.

2. PROPRIÉTÉS DES ANNEAUX (Π) .

PROPOSITION 1. — Soit B un anneau (Π) . Alors :

(1) la fermeture intégrale d'un sous-anneau A de B dans B est un (Π_A) ;

(2) si $\mathfrak{b}$ est un idéal de B , $B/\mathfrak{b}$ est un anneau (Π) ;

(3) si $\mathfrak{b}$ est un idéal de B et si A est un sous-anneau de B tel que B soit un anneau (Π_A) , alors $B/\mathfrak{b}$ est un anneau $(\Pi_{A\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap A})$;

(4) si A est un sous-anneau de B tel que B soit un anneau (Π_A) , et si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A tel qu'il existe dans B un idéal $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b} \cap A = \mathfrak{a}$, alors $B/\mathfrak{b}$ est un anneau $\Pi_{A/\mathfrak{a}}$.

1° (I) résulte immédiatement des définitions

2° Soit $s : B \rightarrow B/\mathfrak{b}$ la surjection canonique et

$$g : B[X] \rightarrow B/\mathfrak{b}[X] \\ \sum_{i=0}^n b_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n s(b_i) X^i.$$

Tout polynôme unitaire $\overline{P}$ de degré n , de $B/\mathfrak{b}[X]$ est l'image par g d'un polynôme unitaire $P = \sum_{i=0}^n b_i X^i$, de degré n , de $B[X]$. Celui-ci se décompose dans $B[X]$ et soit β_j une racine. En appliquant s à la relation $\sum_{i=0}^n b_i \beta_j^i = 0$ on écrit que $s(\beta_j)$ est racine de $\overline{P}$ dans $B/\mathfrak{b}$ et en appliquant g à la décomposition $P = \prod_i (X - \beta_j)$ on obtient la décomposition convenable de $\overline{P}$.

3° de (2) résulte que $B/\mathfrak{b}$ est un anneau (II). D'autre part, $s(A)$ est isomorphe à $A/\mathfrak{b} \cap A$. Soit alors $s(b) \in B/\mathfrak{b}$, il existe des éléments a_i dans A , non tous nuls et tels que $\sum_{i=0}^m a_i b^i = 0$, $a_m = 1$. L'image par s de cette relation exprime que $s(b)$ est entier sur $s(A)$.

4° de (3) résulte immédiatement (4).

COROLLAIRE 1. — Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal premier de A , B un anneau (Π_A) . Alors il existe un idéal premier $\mathfrak{b}$ de B tel que $B/\mathfrak{b}$ est un anneau $(\Pi_{A/\mathfrak{a}})$.

COROLLAIRE 2. — Soit A un anneau, B un anneau (Π_A) bon pour un idéal $\mathfrak{a}$ de A . Alors $B/\mathfrak{a}B$ est un anneau $(\Pi_{A/\mathfrak{a}})$.

PROPOSITION 2. — (1) Soit B un anneau (II) et soit S une partie multiplicative de B . Alors $S^{-1}B$ est un anneau (II).

(2) Soit A un anneau et soit B un anneau (Π_A) . Soit S une partie multiplicative de A . Alors $S^{-1}B$ est un anneau $(\Pi_{S^{-1}A})$.

Soit $P = \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{s_i} X^i$, $\frac{b_n}{s_n} = 1$, un polynôme de $(S^{-1}B)[X]$.

Après réduction au même dénominateur $s = \prod_{i=0}^{n-1} s_i$ et multiplication par s , le terme de degré i de P devient $(sX)^i c_i$, $c_i = \frac{b_i s^{n-i+1}}{s_i^2}$, donc $c_i \in B$. Alors $s^n P$, polynôme unitaire en (sX) , se décompose sur B , donc P se décompose sur $S^{-1}B$. D'où (1).

On sait, d'autre part, que si B est entier sur A , $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$. La démonstration se trouve dans [16], par exemple.

PROPOSITION 3. — Soit $(B_\alpha, f_{\beta\alpha})$ un système inductif d'anneaux tels que pour tout α B_α est un anneau (Π_Λ) . Alors $\lim_{\longrightarrow} B_\alpha$ est un anneau (Π_Λ) .

3. CONSTRUCTION D'UN ANNEAU (Π_Λ) .

Remarque. — Si A est intègre, l'anneau $\bar{A}$ défini plus haut est un anneau (Π_Λ) .

THÉORÈME 1. — Soit A un anneau. Alors il existe un anneau $\mathfrak{A}$ possédant les propriétés suivantes :

- (1) $\mathfrak{A}$ est un anneau (Π_Λ) ;
- (2) $B_1(A, \mathfrak{A})$;
- (3) $\mathfrak{A}$ est plat sur A .

LEMME 1. — Soit A un anneau, et P un polynôme unitaire de $A[X]$. Alors il existe un anneau, A_P , possédant les propriétés suivantes :

- (1) A_P est entier sur A ;
- (2) P se décompose dans $A_P[X]$ en produit de polynômes de degré 1;
- (3) $B_1(A, A_P)$;
- (4) A_P est plat sur A .

Montrons, par récurrence sur le degré n du polynôme, que quel que soit l'anneau A et le polynôme unitaire P de $A[X]$, il existe un anneau A_P .

1° Si $n = 1$, $A_P = A$.

2° Supposons la propriété vraie pour $n = p - 1$ et soit $P = \sum_{i=0}^p a_i X^{p-i}$, $a_i \in A$, $a_0 = 1$. Considérons la suite d'applications $A \xrightarrow{i} A[X] \xrightarrow{s} A[X]/(P)$, i étant l'injection canonique, s la surjection canonique et soit $A_1 = A[X]/(P)$.

La restriction de s à A est injective et permet d'identifier A à un sous-anneau de A_1 . En écrivant que $s(P) = 0$, on exprime que $s(X)$ est racine de P dans $A_1[X]$ et soit $s(X) = x_1$. Alors dans $A_1[X]$, $P = (X - x_1)P_1$, P_1 étant un polynôme unitaire de degré $p - 1$.

Alors, par hypothèse, il existe un anneau $(A_1)_{P_1}$ entier sur A_1 et tel que P_1 se décompose dans $(A_1)_{P_1}[X]$ en produit de polynômes de degré 1.

Posons $A_p = (A_1)_{P_1}$.

a. $A_1 = A[x_1]$ est entier sur A . Donc par transitivité de la dépendance intégrale $(A_1)_{P_1}$ est entier sur A . D'où (1).

b. Dans $(A_1)_{P_1}[X]$, P se décompose convenablement. D'où (2).

c. Précisons la construction ci-dessus :

$$\begin{array}{l}
 A \rightarrow A[X] \\
 \swarrow \\
 A[X]/(P) = A[x_1] = A_1 \rightarrow A_1[X] \\
 \swarrow \\
 A_1[X]/(P_1) = A_1[x_2] = A[x_1, x_2] = A_2 \rightarrow A_2[X] \\
 \swarrow \\
 A_2[X]/(P_2) \dots \\
 \swarrow \dots \\
 A[x_1, \dots, x_n]
 \end{array}$$

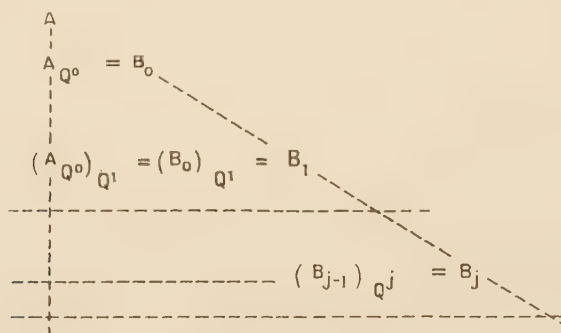
Chaque $A_i[x_{i+1}]$ est un A_i -module libre, de type fini, dont la base contient l'unité de A_i . Donc chaque $A_i[x_{i+1}] = A_{i+1}$ est tel que $\mathbf{B}_1(A_i, A_{i+1})$ (cf. prop. 14, chap. I). De plus, la propriété $\mathbf{B}_1$ est transitive, donc on a $\mathbf{B}_1(A, A_n)$, c'est-à-dire $\mathbf{B}_1(A, A_p)$. D'où (3).

d. De même, A_p étant un A -module libre de rang $n!$ est plat sur A . D'où (4).

LEMME 2. — Soit A un anneau. Alors il existe un anneau $\mathcal{A}_0$ possédant les propriétés suivantes :

- (1) $\mathcal{A}_0$ est entier sur A ;
- (2) Tout polynôme unitaire de $A[X]$ se décompose dans $\mathcal{A}_0[X]$ en produit de polynômes de degré 1;
- (3) $\mathbf{B}_1(A, \mathcal{A}_0)$;
- (4) $\mathcal{A}_0$ est plat sur A .

Considérons l'ensemble, bien ordonné, des polynômes unitaires de $A[X]$, $Q^0, Q^1, \dots, Q^j, \dots, Q^\omega, \dots, Q^\alpha, \dots$



Les B_j s'envoient canoniquement les uns dans les autres et posons

$$\begin{array}{lcl}
 (\varinjlim B_j)_{Q^\omega} & = & B_\omega \\
 \hline
 \text{Si } \alpha = \beta + 1 : & (B_\beta)_{Q^\alpha} & = B_\alpha \\
 \text{Si non :} & (\varinjlim_{\beta < \alpha} B_\beta)_{Q^\alpha} & = B_\alpha
 \end{array}$$

Posons

$$\mathcal{A}_0 = \left(\varinjlim B_\alpha \right).$$

a. $\mathcal{A}_0$ est un anneau commutatif à élément unité, contenant A , entier sur A , d'où (1).

b. Les B_α sont contenus les uns dans les autres, leur limite inductive les contient tous, chacun s'y injecte. Donc un polynôme

unitaire de $A[X]$ dont l'anneau de décomposition est un B_α se décomposera dans $\mathcal{A}_0[X]$, d'où (2).

c. (3) résulte de la proposition 9 du chapitre I.

d. $\mathcal{A}_0$ est limite inductive d'anneaux plats sur A, d'où (4).

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème.

Construisons $\mathcal{A}_1$ à partir de $\mathcal{A}_0$, comme $\mathcal{A}_0$ à partir de A, puis $\mathcal{A}_2$ à partir de $\mathcal{A}_1$, On obtient ainsi une suite d'anneaux emboîtés $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset$ et posons

$$\mathcal{A} = \bigcup_i \mathcal{A}_i.$$

a. Chaque $\mathcal{A}_i$ est commutatif à élément unité, entier sur $\mathcal{A}_{i-1}$ donc sur A. Soit $a \in \mathcal{A}$: il existe i tel que $a \in \mathcal{A}_i$, donc a est entier sur A. D'où (1).

b. Un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathcal{A}$ a un nombre fini de termes, donc il existe i tel que ce polynôme soit élément de $\mathcal{A}_i[X]$, donc se décompose dans $\mathcal{A}_{i+1}[X]$, donc dans $\mathcal{A}[X]$. D'où (2).

c. Pour chaque i , $B_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+1})$, donc, par transitivité de la propriété B_1 , $B_1(A, \mathcal{A}_i)$.

Soit alors $\mathfrak{a}$ un idéal de A, et soit $x = \sum_{j=1}^s \alpha_j a_j$, $\alpha_j \in \mathfrak{a}$, $a_j \in \mathcal{A}$, un élément de A. Les a_j sont en nombre fini et les $\mathcal{A}_i$ sont emboîtés, donc il existe un entier $k \geq 0$ tel que a_j soit dans $\mathcal{A}_k$ pour tout j , $1 \leq j \leq s$. Or $B_1(A, \mathcal{A}_k)$, donc $x \in \mathfrak{a}$. D'où (3).

d. Et, de même, chaque $\mathcal{A}_i$ est plat sur A, donc $\mathcal{A}$ est plat sur A. C'est (4).

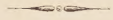
BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOURBAKI, *Modules plats (Algèbre commutative, chap. I, Act. Scient. Ind., n° 1290, Hermann, Paris, 1961, § 2 et 3).*
- [2] BOURBAKI, *Algèbre multilinéaire (Algèbre, chap. III, Act. Scient. Ind., n° 1044, Hermann, Paris, 1958; Appendice 2, n° 5).*
- [3] P. SAMUEL, *Progrès récents d'Algèbre locale (Notas de Matematica, n° 19, Rio de Janeiro).*

- [4] BOURBAKI, *Algèbre multilinéaire* (*Algèbre*, chap. III, *Act. Scient. Ind.*, n° 1044, Hermann, Paris, 1958, § 7, exerc. 2 et 3).
- [5] BOURBAKI, *Idéaux premiers associés et décomposition primaire* (*Algèbre commutative*, chap. IV, *Act. Scient. Ind.*, n° 1293, Hermann, Paris, 1961, § 1).
- [6] BOURBAKI, *Modules sur les anneaux principaux* (*Algèbres*, chap. VII, *Act. Scient. Ind.*, n° 1179, Hermann, Paris, 1952, § 4).
- [7] BOURBAKI, *Localisation* (*Algèbre commutative*, chap. II, *Act. Scient. Ind.*, n° 1290, Hermann, Paris, 1961, § 4).
- [8] BOURBAKI, *Graduations, filtrations et topologies* (*Algèbre commutative*, chap. IV, *Act. Scient. Ind.*, n° 1293, Hermann, Paris, 1961, § 3).
- [8 bis] BOURBAKI, *Localisation* (*Algèbre commutative*, chap. II, *Act. Scient. Ind.*, n° 1290, Hermann, Paris, 1961, § 2).
- [9] BOURBAKI, *Entiers* (*Algèbre commutative*, chap. V, *Act. Scient. Ind.*, n° 1308, Hermann, Paris, 1964, § 2).
- [10] C. CHEVALLEY, *Fundamental Concepts of Algebra*, Academic, Press Inc., New-York, 1956.
- [11] A. MICALI, *Algèbres intègres et sans torsion* (*Bull. Soc. Math. France*, 1966).
- [12] A. MICALI, *Sur les algèbres universelles* (*Ann. Inst. Fourier*, 14, 1964, p. 33-88).
- [13] D. LAZARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964, p. 6313.
- [14] H. FLANDERS, *Amer. Math. Month.*, vol. 60, 1953, p. 543-545.
- [15] BOURBAKI, *Modules sur les anneaux principaux* (*Algèbre*, chap. VII, *Act. Scient. Ind.*, n° 1179, Hermann, Paris, 1952, § 5, n° 4).
- [16] ZARISKI-SAMUEL, *Commutative Algebra*, t. I, D. Van Nostrand Company Inc., 1958.

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1966.)

DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ



Analyse harmonique
dans les groupes localement compacts



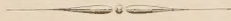
Vu et approuvé :

Clermont-Ferrand, le 12 octobre 1966.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
M. ROQUES

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE
DE CLERMONT-FERRAND,
E. LAPALUS



PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

174301-68

Dépôt légal, Imprimeur, 1968, n° 1856.

Imprimé en France

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

174301-68

Dépôt légal, Imprimeur, 1968, n° 1856.

Imprimé en France